1.7 Les fonctions $\mathscr{C}^\infty$ nulle part analytiques sont denses dans les fonctions $\mathscr{C}^\infty$. (205, 228, 240)

Je propose un développement qui est une variante du classique "les fonctions continues nulle part dérivables sont denses dans les fonctions continues" qui peut se recaser dans la leçon sur les séries entières. L'argument utilisé est le même : c'est le théorème de Baire ! Et on a de la chance, car on a un critère explicite d'analyticité en un point : le critère de Cauchy-Hadamard :

Proposition 1.16 (Critère de Cauchy-Hadamard)**.** Soit $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1])$. Alors f est analytique en un point $a \in [0,1]$ si et seulement si :

$$L := \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{\left|f^{(n)}(a)\right|}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} < +\infty.$$

Dans ce cas, le rayon de convergence de la série entière définissant f en a est égal à $\frac{1}{L}$.

On peut alors prouver le théorème qui nous intéresse :

Théorème 1.17 (Morgenstern)**.** L'ensemble des fonctions $\mathscr{C}^\infty$ nulle part analytiques sur $[0,1]$ est dense dans l'ensemble $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ muni de la topologie de la convergence uniforme de toutes les dérivées.

Démonstration. Pour pouvoir appliquer le théorème de Baire, il faut vérifier qu'on est dans un espace métrique complet.

Étape 1 : La topologie de la convergence uniforme des dérivées est métrisable et munit $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ d'une structure d'espace métrique complet

Considérons la fonction :

$$\begin{array}{rccc} d & : & \mathscr{C}^\infty([0,1])^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & (f,g) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\left\|f^{(n)} - g^{(n)}\right\|_\infty}{1 + \left\|f^{(n)} - g^{(n)}\right\|_\infty} \end{array}$$

Il s'agit d'une distance sur $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ et $(f_k) \in \mathscr{C}^\infty([0,1])^{\mathbb{N}}$ converge vers $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1])$ pour la distance d si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(f_k^{(n)}\right)$ converge uniformément vers $f^{(n)}$: la topologie de la convergence uniforme des dérivées est donc métrisable. Maintenant, si (f_k) est de Cauchy pour la distance d, alors en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(f_k^{(n)}\right)$ est de Cauchy dans $\left(\mathscr{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty\right)$. Ainsi, par complétude de cet espace, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $g_n \in \mathscr{C}^0([0,1])$ tel que $\left(f_k^{(n)}\right)$ converge uniformément vers g_n. Or, un théorème classique de prépa/L2 dit que dans ce cas, la fonction g_0 est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $[0,1]$ et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n = g_0^{(n)}$ (ça se montre en écrivant $f_k^{(n)}$ comme l'intégrale de sa dérivée et en échangeant limite et intégrale par convergence uniforme), de sorte donc que (f_k) converge vers g_0 pour d : on a montré la complétude !

Étape 2 : Les conditions de Cauchy-Hadamard sont vérifiées sur une union dénombrable de fermés d'intérieur vide

Pour $a \in [0,1]$, f est analytique en a si et seulement si f est analytique en tout point d'un certain voisinage de a. On peut donc, par densité de $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ dans $[0,1]$, uniquement se préoccuper des fonctions vérifiant le critère de Cauchy-Hadamard en tout point $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Pour $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ et $c \in \mathbb{N}$, posons :

$$F(a,c) = \left\{ f \in \mathscr{C}^\infty([0,1]) \;\middle|\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(n)}(a)\right| \leqslant n! c^n \right\}.$$

On a alors que $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1])$ est analytique en $a \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ si et seulement si $f \in \displaystyle\bigcup_{c\in\mathbb{N}} F(a,c)$ et donc $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1])$

est analytique en un point de $[0,1]$ si et seulement si $f \in \displaystyle\bigcup_{a\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}\left(\bigcup_{c\in\mathbb{N}} F(a,c)\right)$. Ainsi, il suffit de montrer que $F(a,c)$ est un fermé d'intérieur vide pour tout $(a,c) \in \mathbb{Q}\cap[0,1]\times\mathbb{N}$. Fixons alors $(a,c)\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\times\mathbb{N}$.

1. $F(a,c)$ est fermé : si $(f_k) \in F(a,c)^{\mathbb{N}}$ converge vers $f \in \mathscr{C}^\infty([0,1])$ pour d, alors, par convergence uniforme des dérivées de f_k vers les dérivées de f, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|f^{(n)}(a)\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|f_k^{(n)}(a)\right| \leqslant n!c^n$$

et donc $f \in F(a,c)$.

2. $F(a,c)$ est d'intérieur vide : soient $\varepsilon > 0$ et $f \in F(a,c)$. Le but est de trouver $g \notin F(a,c)$ tel que $d(f,g) < \varepsilon$. La forme de g va être sortie un peu du chapeau, mais, de ce que je comprends, c'est que, étant donné que d donne plus d'importance aux "premières dérivées" (les autres termes dans la somme pouvant être majorés par 2^{-n-1} qui est très petit), on peut modifier f par un cosinus oscillant à mort pour faire exploser les dérivées d'ordre très grand, mais d'amplitude assez petite pour que les premières dérivées restent proches de celles de f. Posons alors :

$$\forall x \in [0,1], \quad g(x) = f(x) + \frac{\varepsilon}{2}b^{-k}\cos(b(x-a))$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $b \geqslant 2$ seront des paramètres à choisir pour que g soit proche de f en distance d. On remarque que :

$$\left|g^{(2k)}(a) - f^{(2k)}(a)\right| = \frac{\varepsilon}{2}b^k$$

et :

$$\forall n \leqslant k, \quad \left\|g^{(n)} - f^{(n)}\right\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}b^{n-k}.$$

Ainsi :

$$d(f,g) \leqslant \sum_{n=0}^{k-1}\frac{\varepsilon}{2}b^{n-k} + \sum_{n\geqslant k}2^{-n-1} = \frac{\varepsilon}{2}b^{-k}\frac{b^k-1}{b-1} + 2^{-k} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2^{-k}.$$

Ainsi, si k est tel que $2^{-k} < \frac{\varepsilon}{2}$, on a que $d(f,g) < \varepsilon$ et si b est tel que :

$$\frac{\varepsilon}{2}b^k > 2(2k)!c^{2k},$$

alors, par inégalité triangulaire, on a :

$$\left|g^{(2k)}(a)\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}b^k - (2k)!c^{2k} > (2k)!c^{2k}.$$

Ainsi, $g \notin F(a,c)$.

On conclut alors, par le théorème de Baire, que l'ensemble :

$$\bigcup_{a\in\mathbb{Q}\cap[0,1]}\left(\bigcup_{c\in\mathbb{N}}F(a,c)\right)$$

est d'intérieur vide comme union dénombrable de fermés d'intérieur vide. Son complémentaire est donc constitué de fonctions nulle part analytiques et est dense dans $\mathscr{C}^\infty([0,1])$ pour la topologie de la convergence uniforme des dérivées ! □

Bonus : un exemple de fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ nulle part analytique

Vous vous en doutez peut-être, mais un tel contre-exemple est forcément une série de Fourier très moche. On pose :

$$\begin{array}{rccl} F & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(k!x)}{(k!)^k}. \end{array}$$

Étant donné que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{k \geqslant 0} (k!)^{n-k}$ converge (majorer, pour k plus grand que n, $(k!)^{n-k}$ par $\frac{1}{k!}$), on a que F est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ par convergence normale. On va montrer que F n'est analytique nulle part sur $\mathbb{R}$ en montrant qu'elle n'est analytique en aucun multiple rationnel de 2π :

1. F n'est pas analytique en 0 : pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a :

   $$F^{(2m)}(0) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k!)^{2m-k} \geqslant (m!)^m.$$

   Ainsi :

   $$\left(\frac{\left| F^{(2m)}(0) \right|}{(2m)!} \right)^{\frac{1}{2m}} \geqslant \frac{\sqrt{m!}}{((2m)!)^{\frac{1}{2m}}} \sim \frac{e\sqrt{m!}}{2m} \xrightarrow[m \to +\infty]{} +\infty.$$

   Et donc :

   $$\limsup_{n \to +\infty} \left(\frac{\left| F^{(n)}(0) \right|}{n!} \right)^{\frac{1}{n}} = +\infty.$$

2. Pour tous $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

   $$F\left(x + \frac{2\pi p}{q}\right) - F(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{\cos\left(k!x + k!\frac{2\pi p}{q}\right) - \cos(k!x)}{(k!)^k} \right) = \sum_{k=0}^{q-1} \left(\frac{\cos\left(k!x + k!\frac{2\pi p}{q}\right) - \cos(k!x)}{(k!)^k} \right).$$

   Ainsi, la fonction $x \mapsto F\left(x + \frac{2\pi p}{q}\right) - F(x)$ est analytique sur $\mathbb{R}$, donc en particulier en 0. Ainsi, F ne peut être analytique en $\frac{2\pi p}{q}$. Ainsi, par densité des rationnels multiples de 2π dans $\mathbb{R}$, on a que F n'est nulle part analytique !